



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

EL FIBRADO DE HOPF EN HOMOTOPÍA ESTABLE

Autor: Luis Muñoz Pereiro

Director: Dr. Carles Casacuberta

Realitzat a: Departament de Matemàtiques
i Informàtica

Barcelona, 27 de junio de 2018

Abstract

In this work we study the Hopf map from the 3-sphere S^3 to the 2-sphere S^2 . We review some properties of the higher homotopy groups of spaces and prove that the Hopf map is a generator of $\pi_3(S^2)$.

As an introduction to stable homotopy theory, we prove the Freudenthal suspension theorem for the spheres and explain why the first stable homotopy group π_1^s is isomorphic to $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. In order to prove it we use the Pontryagin-Thom construction, a result that relates the homotopy groups of spheres with framed cobordism classes of framed manifolds. Our goal is to understand geometrically why the class represented by the Hopf map has infinite order in $\pi_3(S^2)$ but its suspensions have order 2 in $\pi_{n+1}(S^n)$ for $n > 2$.

Resumen

En este trabajo se estudia la aplicación de Hopf de la 3-esfera S^3 a la 2-esfera S^2 . Se describen algunas propiedades de los grupos de homotopía de los espacios y se demuestra que la clase de la aplicación de Hopf genera el grupo $\pi_3(S^2)$.

Como introducción a la teoría de homotopía estable, se demuestra el teorema de suspensión de Freudenthal para las esferas y se deduce que el primer grupo de homotopía estable π_1^s es isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Para ello se utiliza la construcción de Pontryagin-Thom, un resultado que relaciona los grupos de homotopía de las esferas con las clases de cobordismo de variedades diferenciables con referencias. El objetivo del trabajo es entender geométicamente por qué la aplicación de Hopf tiene orden infinito en $\pi_3(S^2)$ pero sus suspensiones tienen orden 2 $\pi_{n+1}(S^n)$ para $n > 2$.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi familia todo el apoyo que me han dado a lo largo de la carrera. También quiero agradecer a mi tutor el doctor Carles Casacuberta por orientarme en el desarrollo del trabajo.

Índice

Introducción	1
1. El fibrado de Hopf	3
1.1. Acciones de grupos sobre espacios topológicos	3
1.2. Definición del fibrado de Hopf	6
1.3. Enlace de las fibras	7
2. El fibrado de Hopf y $\pi_3(S^2)$	10
2.1. Grupos de homotopía relativa	11
2.2. Sucesión exacta asociada a un fibrado	13
3. El fibrado de Hopf y $\pi_{n+1}(S^n)$	16
3.1. Entornos tubulares, aproximación diferencial y el teorema de Sard .	17
3.2. La construcción de Pontryagin-Thom	19
3.3. Teorema de suspensión de Freudenthal	22
3.4. El morfismo J_1	25
4. Conclusiones	29

Introducción

Los grupos de homotopía de las esferas clasifican las aplicaciones continuas entre esferas módulo homotopía. La determinación de estos grupos es un problema del ámbito de la topología algebraica muy complejo y a día de hoy no están todos determinados. Como muestra, veamos la siguiente tabla de grupos de homotopía de las esferas:

	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6
S^1	\mathbb{Z}	0	0	0	0	0
S^2	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{12}
S^3	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{12}
S^4	0	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2
S^5	0	0	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2
S^6	0	0	0	0	0	\mathbb{Z}

Algunos patrones se empiezan a mostrar; por ejemplo el más visible es que bajo la diagonal todos los grupos son nulos. También se puede ver en la diagonal que $\pi_n(S^n)$ es siempre \mathbb{Z} . Veamos algunos grupos de orden mayor:

	π_7	π_8	π_9	π_{10}	π_{11}	π_{12}	π_{13}	π_{14}	π_{15}
S^1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S^2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_3	\mathbb{Z}_{15}	\mathbb{Z}_2	$(\mathbb{Z}_2)^2$	$\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{84} \times (\mathbb{Z}_2)^2$	$(\mathbb{Z}_2)^2$
S^3	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_3	\mathbb{Z}_{15}	\mathbb{Z}_2	$(\mathbb{Z}_2)^2$	$\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{84} \times (\mathbb{Z}_2)^2$	$(\mathbb{Z}_2)^2$
S^4	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{12}$	$(\mathbb{Z}_2)^2$	$(\mathbb{Z}_2)^2$	$\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_3$	\mathbb{Z}_{15}	\mathbb{Z}_2	$(\mathbb{Z}_2)^3$	$\mathbb{Z}_{120} \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{84} \times (\mathbb{Z}_2)^5$
S^5	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{24}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{30}	\mathbb{Z}_2	$(\mathbb{Z}_2)^3$	$\mathbb{Z}_{72} \times \mathbb{Z}_2$
S^6	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{24}	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{60}	$\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_2$	$(\mathbb{Z}_2)^3$
S^7	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{24}	0	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{120}	$(\mathbb{Z}_2)^3$
S^8	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{24}	0	0	\mathbb{Z}_2	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{120}$

Aquí la distribución se vuelve más difusa. De estas tablas uno empieza a hacerse una idea sobre lo complicado que puede ser determinar estos grupos.

En el año 1931, Heinz Hopf publicó *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche*. En este artículo Hopf introdujo el fibrado de Hopf, una aplicación de la 3-esfera a la 2-esfera, y vio que su clase de homotopía tiene orden infinito en $\pi_3(S^2)$. De hecho, cuando Hopf escribió este artículo los grupos de homotopía no estaban definidos todavía. Fue en el año 1932 que Eduard Čech definió los grupos de homotopía de orden mayor que 1 en el artículo *Höherdimensionale Homotopiegruppen*.

Entonces ya se sabía que el grupo de homología de dimensión 1 es el abelianizado del grupo fundamental, por lo que el primer grupo de homología de un espacio nos da menos información sobre un espacio topológico que el grupo fundamental. Como los grupos de homotopía de orden mayor son abelianos, pasaron desapercibidos en un principio, ya que entonces se esperaban nuevas construcciones no abelianas. En el año 1934, Witold Hurewicz recuperó los grupos de homotopía y demostró resultados sustanciales entorno a estos en las publicaciones *Beiträge zur Topologie der*

Deformationen I. Höherdimensionale Homotopiegruppen; II. Homotopie und Homologiegruppen. Esto hizo que los grupos de homotopía de orden mayor despertasen el interés de otros matemáticos.

En 1937, Hans Freudenthal, discípulo de Hopf, introdujo la suspensión de un espacio topológico y la suspensión de una aplicación continua en su publicación *Über die Klassen der Sphärenabbildungen*. De este modo construyó morfismos de grupos $E: \pi_{n+k}(S^n) \rightarrow \pi_{n+k+1}(S^{n+1})$ y demostró que estos son epimorfismos para $n > k$ y monomorfismos para $n > k + 1$. Este resultado se conoce como el teorema de suspensión de Freudenthal y supuso un gran avance en el estudio de los grupos de homotopía de las esferas. En esa publicación también demostró que $\pi_4(S^3)$ es isomorfo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y, como consecuencia del teorema de suspensión, $\pi_{n+1}(S^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ para $n \geq 3$.

Del teorema de suspensión de Freudenthal se dedujo que, fijado k , los grupos de homotopía $\pi_{n+k}(S^n)$ estabilizan para n suficientemente grande, es decir, son todos isomorfos. Al grupo en el que estabilizan se le llama k -ésimo grupo de homotopía estable.

El objetivo del primer capítulo de este trabajo es definir el fibrado de Hopf y ver una propiedad característica de sus fibras: todas están enlazadas.

Otro concepto fundamental del trabajo, posterior a la definición del fibrado de Hopf, es la noción de fibrado. El desarrollo de este tema involucró a matemáticos como Herbert Seifert, Jacques Feldbau, Hassler Whitney, Norman Steenrod, Jean-Pierre Serre y el mismo Hopf. En el segundo capítulo introduciremos la noción de fibrado y los grupos de homotopía relativos, y en particular los grupos de homotopía. Luego veremos que los fibrados cumplen la propiedad de elevación de homotopías para los cubos, un resultado fundamental para el trabajo. Como consecuencia de esta propiedad veremos que el fibrado de Hopf genera $\pi_3(S^2)$.

El objetivo final del trabajo es entender por qué el fibrado de Hopf pasa a tener orden 2 al suspenderlo. Para ello usaremos la construcción de Pontryagin-Thom. Esta construcción nos relacionará los grupos de homotopía de las esferas con la teoría de cobordismo y en este contexto daremos una demostración del teorema de suspensión de Freudenthal para aplicaciones entre esferas.

Una vez demostrado el teorema de suspensión, introduciremos el J_1 -morfismo, un morfismo de grupos entre el grupo fundamental del grupo de las rotaciones $SO(n)$ y el grupo de homotopía $\pi_{n+1}(S^n)$. Veremos que este morfismo es de hecho un isomorfismo y de ahí se deducirá que $\pi_{n+1}(S^n)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ para $n > 2$. Además, este morfismo nos dará una perspectiva geométrica para entender por qué el fibrado de Hopf tiene orden infinito en $\pi_3(S^2)$ y pasa a tener orden dos al suspenderlo.

1. El fibrado de Hopf

Definiremos el fibrado de Hopf como la aplicación cociente al espacio de órbitas respecto de una acción, por lo que antes de definirlo necesitamos establecer ciertos resultados entorno a las acciones de grupo sobre espacios topológicos.

1.1. Acciones de grupos sobre espacios topológicos

Sea X un espacio topológico. Denotaremos por $\text{Aut}(X)$ el grupo de los homeomorfismos $X \rightarrow X$.

Definición 1.1. Sean G un grupo y X un espacio topológico. Una *acción* de G sobre X es un morfismo de grupos

$$\phi : G \rightarrow \text{Aut}(X).$$

Dados $x \in X$ y $g \in G$ denotaremos $g \cdot x := \phi(g)(x)$.

Definición 1.2. Sea $\phi : G \rightarrow \text{Aut}(X)$ una acción de G sobre X y sea $x \in X$. La *órbita* de x es el conjunto

$$Gx := \{g \cdot x \mid g \in G\}.$$

Dada una acción de G sobre X podemos definir la relación

$$x \sim y \iff x \in Gy.$$

La relación \sim es de equivalencia. Llamaremos *espacio de órbitas* al espacio cociente respecto a esta relación y lo denotaremos por X/G .

Lema 1.3. Sean X un espacio topológico y G un grupo que actúa sobre X . La aplicación cociente $X \rightarrow X/G$ es una aplicación abierta.

Demostración: Sea $U \subset X$ un abierto. Por definición de la topología cociente, $V = q(U)$ es abierto si, y solo si, $q^{-1}(V)$ es abierto. Como los homeomorfismos son aplicaciones abiertas,

$$q^{-1}(V) = \bigcup_{g \in G} g \cdot U$$

es unión de abiertos. Por lo tanto $q^{-1}(V)$ es abierto. \square

Definición 1.4. Un *grupo topológico* es un espacio topológico de Hausdorff con estructura de grupo tal que la aplicación $G \times G \rightarrow G$ definida como

$$(g, h) \mapsto gh^{-1}$$

es continua.

De hecho, esta definición es equivalente a que la multiplicación e inversión sean aplicaciones continuas.

Definición 1.5. Sea G un grupo topológico y X un espacio topológico tal que G actúa sobre X . Se dice que la acción es *continua* si la aplicación $G \times X \rightarrow X$ definida como

$$(g, x) \mapsto g \cdot x$$

es una aplicación continua.

Sean X e Y dos espacios topológicos, \sim una relación de equivalencia en X y q la aplicación cociente. Si $f: X \rightarrow Y$ es una aplicación continua tal que para todos los $x, y \in X$ con $x \sim y$ se cumple $f(x) = f(y)$, entonces existe una única aplicación continua $\tilde{f}: (X/\sim) \rightarrow Y$ tal que $f = \tilde{f} \circ q$. En este caso diremos que f es *compatible* con q .

Lema 1.6. Sean G_1, G_2 grupos y X un espacio topológico tal que $G_1 \times G_2$ actúa sobre X . Entonces se inducen acciones de G_1 y G_2 sobre X y se cumple:

1. Existe una acción natural de G_1 en X/G_2 .
2. Si G_1 y G_2 son grupos topológicos y $G_1 \times G_2$ actúa sobre X de forma continua, entonces G_1 actúa de forma continua en X/G_2 .

Demostración: 1. La acción de G_1 sobre X se define como

$$g \cdot x := (g, 1) \cdot x$$

y la acción de G_2 sobre X como

$$h \cdot x := (1, h) \cdot x.$$

Sean $[x] \in X/G_2$ y $g \in G_1$. Definimos

$$g \cdot [x] = [g \cdot x].$$

Veamos que la acción está bien definida. Supongamos que $[x] = [y]$. Entonces existe $h \in G_2$ tal que $x = h \cdot y$ y

$$g \cdot x = g \cdot (h \cdot y) = (g, 1) \cdot (1, h) \cdot y = (g, h) \cdot y = h \cdot (g \cdot y).$$

Por lo tanto $[g \cdot x] = [g \cdot y]$. Todo $g \in G_1$ induce un homeomorfismo $\phi: X \rightarrow X$ y una biyección $\psi: X/G_2 \rightarrow X/G_2$. Sea $q: X \rightarrow X/G_2$ la aplicación cociente. Entonces $q \circ \phi: X \rightarrow X/G_2$ es una aplicación continua compatible con q . Como $\psi \circ q = q \circ \phi$, se deduce que ψ es continua. Aplicando el mismo argumento a ψ^{-1} obtenemos que esta es continua y por lo tanto ψ es homeomorfismo.

2. La aplicación $a: G_1 \times X \rightarrow X$ definida como $a(g, x) = g \cdot x$ es continua porque es restricción de $G_1 \times G_2 \times X \rightarrow X$, que es continua por hipótesis. Definimos $f: G_1 \times X \rightarrow G_1 \times (X/G_2)$ como $f = (\text{Id}, q)$. Así f es continua porque Id y q lo son. Además como las dos son abiertas, f es abierta.

Consideramos la acción de G_2 sobre $G_1 \times X$ definida como $h \cdot (g, x) = (g, h \cdot x)$. Sea r la aplicación cociente. Tenemos que f es compatible con r . Por lo tanto

existe una única $\phi: (G_1 \times X)/G_2 \rightarrow G_1 \times (X/G_2)$ continua tal que $f = \phi \circ r$. De hecho ϕ es la aplicación $[g, x] \mapsto (g, [x])$ biyectiva con inversa $(g, [x]) \mapsto [g, x]$. Un abierto de $(G_1 \times X)/G_2$ es la imagen de un abierto de $G_1 \times X$ por r . Por conmutatividad ϕ es una aplicación abierta y por lo tanto es un homeomorfismo.

La aplicación $q \circ a$ es continua y compatible con r , por lo que existe una única ψ tal que $\psi \circ r = q \circ a$. Componiendo con ϕ^{-1} tenemos que la aplicación $T: G_1 \times (X/G_2) \rightarrow X/G_2$ definida como $T(g, [x]) = [g \cdot x]$ es continua y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X & & \\
 & \nearrow a & & \searrow q & \\
 G_1 \times X & \xrightarrow{f} & G_1 \times (X/G_2) & \xrightarrow{T} & X/G_2 \\
 & \searrow r & \uparrow \exists! \phi & \nearrow \exists! \psi & \\
 & & (G_1 \times X)/G_2 & &
 \end{array}$$

Esto concluye la demostración. \square

Lema 1.7. Sean G_1 y G_2 grupos y X un espacio topológico tal que $G_1 \times G_2$ actúa sobre X . Entonces $X/(G_1 \times G_2)$ es homeomorfo a $(X/G_1)/G_2$ y la aplicación cociente

$$X \rightarrow X/(G_1 \times G_2)$$

factoriza por X/G_1 de forma única.

Demostración: Veamos que tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{q_1} & X/G_1 \\
 \downarrow q_{12} & \searrow \phi_1 & \downarrow q_2 \\
 X/(G_1 \times G_2) & \xleftarrow{\phi_2} & (X/G_1)/G_2
 \end{array}$$

Sean $q_1: X \rightarrow X/G_1$, $q_2: X/G_1 \rightarrow (X/G_1)/G_2$, $q_{12}: X \rightarrow X/(G_1 \times G_2)$ las aplicaciones cociente. Como $q_2 \circ q_1$ es compatible con q_{12} , existe una única $\phi_{12}: X/(G_1 \times G_2) \rightarrow (X/G_1)/G_2$ continua tal que $\phi_{12} \circ q_{12} = q_2 \circ q_1$. Como q_{12} es compatible con q_1 , existe una única $\phi_1: X/G_1 \rightarrow X/(G_1 \times G_2)$ tal que $\phi_1 \circ q_1 = q_{12}$. Como ϕ_1 es compatible con q_2 existe una única $\phi_2: (X/G_1)/G_2 \rightarrow X/(G_1 \times G_2)$ tal que $\phi_1 = \phi_2 \circ q_2$. Como ϕ_{12} y ϕ_2 son continuas y una inversa de la otra, $(X/G_1)/G_2$ es homeomorfo a $X/(G_1 \times G_2)$. \square

1.2. Definición del fibrado de Hopf

Para definir el fibrado de Hopf consideremos la acción de \mathbb{C}^* sobre $\mathbb{C}_0^2 := \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ definida como

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C}^* &\longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}_0^2) \\ w &\longmapsto ((z_1, z_2) \mapsto (wz_1, wz_2)). \end{aligned}$$

Esta acción es continua y como el grupo multiplicativo \mathbb{C}^* es isomorfo a $\mathbb{R}_{>0} \times S^1$ podemos considerar la acción ψ de $\mathbb{R}_{>0}$ sobre \mathbb{C}_0^2 inducida por ϕ :

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}_{>0} &\longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}_0^2) \\ x &\longmapsto ((z_1, z_2) \mapsto (xz_1, xz_2)). \end{aligned}$$

En este contexto, la recta proyectiva compleja \mathbb{CP}^1 es el espacio de órbitas respecto a la acción ϕ . Por otra parte, \mathbb{CP}^1 es homeomorfo a la compactificación de Alexandroff del plano complejo \mathbb{C} mediante la aplicación $[(z_1, z_2)] \mapsto \frac{z_1}{z_2}$ si $z_2 \neq 0$ y $[(z, 0)] \mapsto \infty$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Por lo tanto $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$.

También definimos la 3-esfera compleja $S_{\mathbb{C}}^3$ como el espacio de órbitas respecto a la acción ψ . Si pensamos \mathbb{C}_0^2 como el conjunto de los vectores no nulos de \mathbb{R}^4 , las órbitas de la acción ψ son semirrectas desde el origen. Intuitivamente, el espacio de órbitas son las direcciones en \mathbb{R}^4 , es decir, vectores no nulos módulo proporcionalidad positiva. Si tomamos como representante de cada clase el único vector unitario en la dirección, cada clase determina un punto de la esfera S^3 y, recíprocamente, cada punto de S^3 determina una dirección en \mathbb{R}^4 . De hecho esta correspondencia define un homeomorfismo entre S^3 y $S_{\mathbb{C}}^3$ de la siguiente manera:

Proposición 1.8. *La aplicación*

$$\begin{aligned} \varphi : S^3 &\longrightarrow S_{\mathbb{C}}^3 \\ (x, y, z, t) &\longmapsto [(x + iy, z + it)] \end{aligned}$$

es un homeomorfismo.

Demostración: Sean $\mathbb{R}_0^4 := \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$, $i : S^3 \rightarrow \mathbb{R}_0^4$ la inclusión, $r : \mathbb{C}_0^2 \rightarrow S_{\mathbb{C}}^3$ la aplicación cociente y $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}^2$ dado por $\tilde{\varphi}(x, y, z, t) = (x + iy, z + it)$. Sea $\varphi_0 = \tilde{\varphi}|_{\mathbb{R}_0^4}$. Entonces φ_0 es un homeomorfismo; por lo tanto $\varphi = r \circ \varphi_0 \circ i$ es continua.

Consideremos ahora

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}_0^2 &\longrightarrow S^3 \\ x &\longmapsto \varphi_0^{-1} \left(\frac{x}{\|x\|} \right). \end{aligned}$$

La aplicación f es continua y compatible con r , y por lo tanto existe una única aplicación $\varphi^{-1} : S_{\mathbb{C}}^3 \rightarrow S^3$ continua tal que $\varphi^{-1} \circ r = f$ y esta es la inversa de φ . Por lo tanto φ es homeomorfismo. \square

Definición 1.9. Sean q_1 y q_2 las aplicaciones cociente respecto a las acciones ψ y ϕ respectivamente. El *fibrado de Hopf* es la única aplicación continua (dada por el Lema 1.7) $\eta : S^3_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{CP}^1$ que hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{C}^2_0 & \\ q_1 \swarrow & & \searrow q_2 \\ S^3_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\eta} & \mathbb{CP}^1 \end{array}$$

Definido así, el fibrado de Hopf es la aplicación cociente de la S^1 -acción sobre $S^3_{\mathbb{C}}$ y por lo tanto sus fibras son órbitas. Tomando $[z_1 : z_2] \in \mathbb{CP}^1$ con $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ podemos parametrizar la fibra sobre $[z_1 : z_2]$ en S^3 como

$$\eta^{-1}[z_1 : z_2] = \{(e^{it}z_1, e^{it}z_2) \mid t \in [0, 2\pi]\} \cong S^1.$$

Las fibras son todas homeomorfas a S^1 . Además, como η es aplicación cociente respecto a una acción, η es exhaustiva, continua y abierta.

1.3. Enlace de las fibras

En este apartado veremos una propiedad característica del fibrado de Hopf, y es que dos fibras cualesquiera están enlazadas. Empezamos definiendo el concepto de enlace de dos curvas en S^3 .

Definición 1.10. Llamaremos *n-enlace* en S^3 a n embeddings f_1, \dots, f_n de S^1 en S^3 tales que $f_1(S^1), \dots, f_n(S^1)$ son disjuntas. Diremos que dos *n-enlaces* $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n$ en S^3 son *equivalentes* si existe un homeomorfismo $h : S^3 \rightarrow S^3$ tal que $g_1 = h \circ f_1, \dots, g_n = h \circ f_n$.

Definición 1.11. Un enlace en $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ es *trivial* si es equivalente a n embeddings disjuntos de S^1 en $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

Definición 1.12. Diremos que dos embeddings de S^1 en S^3 están *enlazados* si el enlace que forman no es trivial.

Lema 1.13. Sea f_1, f_2 un 2-enlace en S^3 . Si $[f_1] \in \pi_1(S^3 \setminus f_2(S^1))$ no es trivial, entonces f_1, f_2 están enlazados.

Demostración: Si f_1, f_2 no estuviesen enlazados existiría un homeomorfismo $\phi : S^3 \rightarrow S^3$ tal que $\phi \circ f_1, \phi \circ f_2$ sería un enlace trivial. Entonces se induciría un isomorfismo entre los grupos fundamentales

$$\phi_* : \pi_1(S^3 \setminus f_2(S^1)) \rightarrow \pi_1(\phi(S^3 \setminus f_2(S^1))).$$

Como $\phi \circ f_1$ es homótopa a constante en $S^3 \setminus \phi \circ f_2(S^1)$, $\phi_*([f_1])$ es trivial, y esto contradice que $[f_1] \in \pi_1(S^3 \setminus f_2(S^1))$ no es trivial. \square

Veamos que dos fibras cualesquiera del fibrado de Hopf están enlazadas:

Podemos parametrizar las fibras sobre $[0 : 1]$ y $[1 : 0]$ como

$$\begin{aligned} \sigma_1 : [0, 1] &\longrightarrow S^3 \\ t &\longmapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, 0, 0), \end{aligned} \quad \begin{aligned} \sigma_2 : [0, 1] &\longrightarrow S^3 \\ t &\longmapsto (0, 0, \cos 2\pi t, \sin 2\pi t). \end{aligned}$$

Consideremos la proyección estereográfica

$$\begin{aligned} \varphi : S^3 \setminus \{(1, 0, 0, 0)\} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) &\longmapsto \left(\frac{y}{1-x}, \frac{z}{1-x}, \frac{t}{1-x} \right). \end{aligned}$$

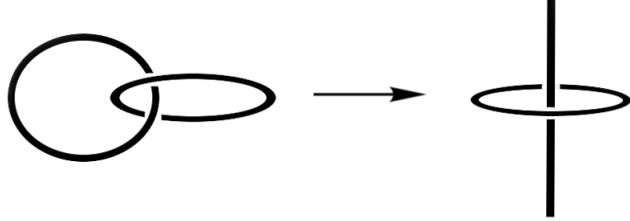
Como φ es homeomorfismo, $\varphi_0 = \varphi|_{S^3 \setminus \sigma_1([0,1])}$ es un homeomorfismo sobre su imagen y por lo tanto se induce un isomorfismo entre los grupos fundamentales $\pi_1(S^3 \setminus \sigma_1([0, 1]))$ y $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \varphi(\sigma_1([0, 1])))$. Además

$$\varphi(S^3 \setminus \sigma_1([0, 1])) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\},$$

$$\varphi(\sigma_2([0, 1])) = \{(0, \cos t, \sin t) \mid t \in [0, 2\pi]\}.$$

Como $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \simeq S^1$ es retracto de deformación de $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ y $[\varphi \circ \sigma_2]$ es un generador de su grupo fundamental, tenemos que $[\varphi \circ \sigma_2]$ es no nulo y, en conclusión, las fibras sobre $[0 : 1]$ y $[1 : 0]$ están enlazadas.

Para ver que el resto de fibras están enlazadas veremos que todos los 2-enlaces formados por dos fibras son equivalentes al enlace de las fibras sobre $[0 : 1]$ y $[1 : 0]$.



Consideremos la acción de $GL_2(\mathbb{C})$ sobre \mathbb{C}^2 . Como los homeomorfismos inducidos por $GL_2(\mathbb{C})$ son lineales, esta acción descende de forma natural a \mathbb{CP}^1 y $S^3_{\mathbb{C}}$. Además para todo $g \in GL_2(\mathbb{C})$ tenemos que $g \cdot \eta(z_1, z_2) = \eta(g \cdot (z_1, z_2))$. Sean $[z_1 : z_2], [w_1 : w_2] \in \mathbb{CP}^1$ arbitrarios. Si consideramos $g \in GL_2(\mathbb{C})$ definida como

$$g = \begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ z_2 & w_2 \end{pmatrix},$$

entonces el homeomorfismo que induce en \mathbb{CP}^1 cumple que $g \cdot [1 : 0] = [z_1, z_2]$ y $g \cdot [0 : 1] = [w_1, w_2]$. Por lo tanto, el homeomorfismo inducido en $S^3_{\mathbb{C}}$ envía las fibras sobre $[1 : 0]$ y $[0 : 1]$ a las fibras sobre $[z_1 : z_2]$ y $[w_1, w_2]$ respectivamente. Puesto que sabemos que las fibras sobre $[1 : 0]$ y $[0 : 1]$ están enlazadas, concluimos que las fibras sobre $[z_1 : z_2]$ y $[w_1, w_2]$ también lo están.

El fibrado de Hopf nos da una descripción interesante de la 3-esfera como unión disjunta de circunferencias enlazados entre sí. Tomando las parametrizaciones de las fibras que hemos dado antes y componiendo con la proyección estereográfica se puede ver la disposición de las fibras del fibrado de Hopf en \mathbb{R}^3 .

Las siguientes imágenes ilustran la posición de algunas de las fibras del fibrado de Hopf. En la primera se ven las fibras correspondientes a los puntos de una espiral que empieza en el polo sur y acaba en el ecuador dando cuatro vueltas. En la segunda vemos las fibras sobre un paralelo de la esfera. La última imagen corresponde a las fibras sobre una parte de un meridiano en el hemisferio inferior.

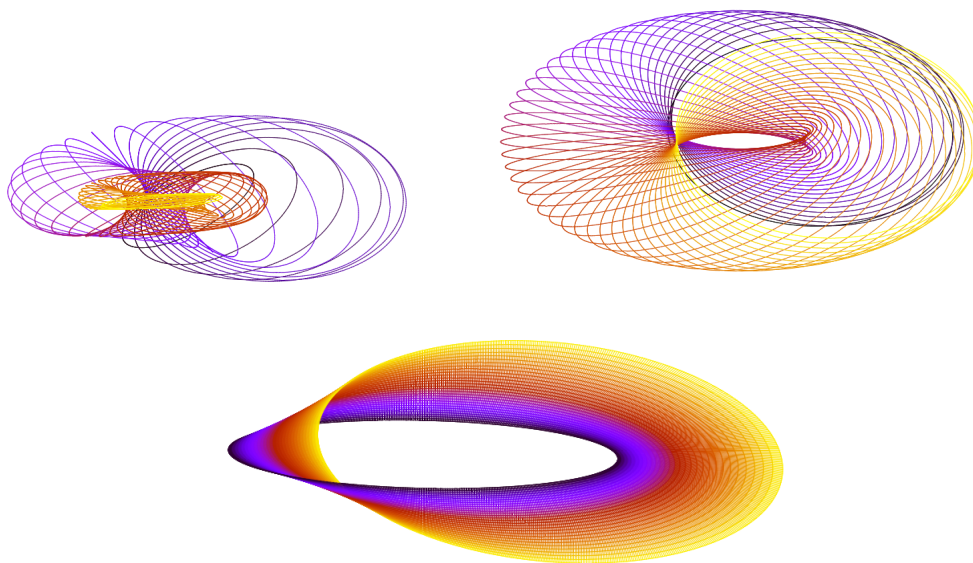


Figura 1: Algunas familias de fibras del fibrado de Hopf vistas en \mathbb{R}^3 mediante la proyección estereográfica

2. El fibrado de Hopf y $\pi_3(S^2)$

Primero comprobaremos que el fibrado de Hopf es un fibrado y veremos que todo fibrado cumple la propiedad de elevación de homotopías para los cubos I^n . Luego veremos que a todo fibrado se le puede asociar una sucesión exacta y de ahí se deducirá que la clase de homotopía de η genera $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$. Empecemos definiendo qué es un fibrado.

Definición 2.1. Un *fibrado* es una terna (E, B, F) de espacios topológicos y una aplicación continua y exhaustiva $p: E \rightarrow B$ localmente trivial; es decir, para todo $x \in B$ existe un entorno $U \subset B$ de x tal que existe un homeomorfismo $\varphi: p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times F \\ & \searrow p & \downarrow \pi \\ & & U \end{array}$$

En este caso decimos que U es un *entorno trivializante* y φ es una *trivialización local*. Dado un fibrado (E, B, F, p) decimos que B es el *espacio base*, E es el *espacio total* y F es la *fibra*.

Veamos que el fibrado de Hopf es un fibrado. Ya hemos visto que η es continua y exhaustiva. Consideremos los abiertos

$$U_1 = \{[z_1 : z_2] \in \mathbb{CP}^1 \mid z_1 \neq 0\}, \quad U_2 = \{[z_1 : z_2] \in \mathbb{CP}^1 \mid z_2 \neq 0\}.$$

Tenemos que $\mathbb{CP}^1 = U_1 \cup U_2$. Definimos las aplicaciones

$$\begin{aligned} \varphi_i: \eta^{-1}(U_i) &\longrightarrow U_i \times S^1 & \psi_i: U_i \times S^1 &\longrightarrow \eta^{-1}(U_i) \\ (z_1, z_2) &\longmapsto \left(\eta(z_1, z_2), \frac{z_i}{|z_i|} \right), & ([z_1 : z_2], e^{it}) &\longmapsto e^{it} \left(\frac{z_1}{z_i}, \frac{z_2}{z_i} \right) \frac{|z_i|}{\|(z_1, z_2)\|}. \end{aligned}$$

Son continuas y además

$$(\psi_i \circ \varphi_i)(z_1, z_2) = \psi_i \left(\eta(z_1, z_2), \frac{z_i}{|z_i|} \right) = \frac{z_i}{|z_i|} \left(\frac{z_1}{z_i}, \frac{z_2}{z_i} \right) \frac{|z_i|}{\|(z_1, z_2)\|} = (z_1, z_2),$$

$$(\varphi_i \circ \psi_i)([z_1 : z_2], e^{it}) = \varphi_i \left(e^{it} \left(\frac{z_1}{z_i}, \frac{z_2}{z_i} \right) \frac{|z_i|}{\|(z_1, z_2)\|} \right) = ([z_1 : z_2], e^{it}).$$

Por lo que son homeomorfismos inverso uno del otro. En conclusión η es un fibrado.

Definición 2.2. Dada una aplicación continua $p: E \rightarrow B$ y un espacio topológico X , se dice que (X, p) satisface la *propiedad de elevación de homotopías* si para toda homotopía $F: X \times I \rightarrow B$ y toda aplicación continua $\tilde{F}_0: X \rightarrow E$ tal que $F(\cdot, 0) = p \circ \tilde{F}_0$ existe una homotopía $\tilde{F}: X \times I \rightarrow E$ tal que $F = p \circ \tilde{F}$ y $\tilde{F}(\cdot, 0) = \tilde{F}_0$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{F}_0} & E \\ \downarrow X \times 0 & \nearrow \tilde{F} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{F} & B \end{array}$$

Proposición 2.3. *Todo fibrado cumple la propiedad de elevación de homotopías para los cubos I^n .*

De hecho a una aplicación exhaustiva que cumple la propiedad de elevación de homotopías para los cubos I^n se le llama *fibración de Serre* y lo que esta proposición nos dice es que todo fibrado es una fibración de Serre.

Demostración: Sea (E, B, F, p) un fibrado y

$$\begin{aligned} H : I^n \times I &\longrightarrow B \\ (x, t) &\longmapsto g_t(x) \end{aligned}$$

una homotopía. Sea $\tilde{g}_0 : I^n \rightarrow E$ tal que $g_0 = p \circ \tilde{g}_0$.

Tomamos un recubrimiento abierto $\{U_\alpha\}$ de B con trivializaciones

$$h_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F.$$

Como $I^n \times I$ es compacto, podemos dividir I^n en cubos C_i e I en intervalos $I_j = [t_j, t_{j+1}]$ tales que $H(C_i \times I_j) \subset U_\alpha$ para cierto α . Por lo tanto es suficiente demostrar el caso en que $H(I^n \times I) \subset U_\alpha$ para cierto α .

Veamos primero el caso $n = 0$. Sea $x_0 = \tilde{H}_0(0)$ tal que $p(x_0) = H(0)$. Sea $z_0 \in F$ tal que $h_\alpha^{-1}(H(0), z_0) = x_0$. Podemos considerar la homotopía $\tilde{H}(t) = h_\alpha^{-1}(H(t), z_0)$ y esta cumple que $p \circ \tilde{H} = H$ y $\tilde{H}(0) = x_0$.

Sea \tilde{H}_0 tal que $p \circ \tilde{H} = H(\cdot, 0)$. Supongamos por inducción sobre n que \tilde{H} está construida en las caras $I^n \times \{0\} \cup \partial I^n \times I$ y veamos que la podemos extender a todo $I^n \times I$. Tenemos que $\tilde{H}(I^n \times \{0\} \cup \partial I^n \times I) \subset p^{-1}(U_\alpha)$. Sea $\bar{H} = h_\alpha \circ \tilde{H} = (\bar{H}_1, \bar{H}_2)$. Sea φ una retracción $I^n \times I \rightarrow I^n \times \{0\} \cup \partial I^n \times I$. Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \bar{H} : I^n \times I &\longrightarrow U_\alpha \times F \\ x &\longmapsto (H(x), (\bar{H}_2 \circ \varphi)(x)). \end{aligned}$$

Construida así tenemos que $\tilde{H} = h_\alpha^{-1} \circ \bar{H}$ cumple $H = p \circ \tilde{H}$ y $\tilde{H}(x, 0) = \tilde{H}_0(x)$. \square

2.1. Grupos de homotopía relativa

Construiremos una sucesión exacta asociada a un fibrado a partir de una sucesión exacta construida con grupos de homotopía relativa. Empecemos introduciendo los grupos de homotopía relativa.

Definición 2.4. Sea X un espacio topológico, $A \subset X$ un subespacio y $x_0 \in A$. Se dice que la terna (X, A, x_0) es un *par de espacios topológicos con punto base* x_0 .

Definición 2.5. Un *esferoide relativo n -dimensional* de un par (X, A, x_0) es una aplicación continua $f : I^n \rightarrow X$ tal que:

1. $f(I^{n-1} \times \{0\}) \subset A$;
2. $f(\partial(I^n \setminus I^{n-1} \times \{0\})) = x_0$.

Definición 2.6. Dados f y g dos esferoides relativos n -dimensionales de (X, A, x_0) , se dice que f y g son *homótopos relativamente* en (X, A, x_0) si existe una homotopía $H: I^n \times I \rightarrow X$ tal que $H(\cdot, t)$ es un esferoide relativo para todo $t \in I$. En el caso $A = \{x_0\}$ diremos que f y g son *homótopos* en (X, x_0) .

Denotamos por $\pi_n(X, A, x_0)$ el conjunto de clases de homotopía relativa de esferoides relativos n -dimensionales en (X, A, x_0) .

Sean $[f], [g] \in \pi_n(X, A, x_0)$. Definimos $[f] + [g] = [f + g]$ donde

$$(f + g)(t, x) = \begin{cases} f(2t, x) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, x \in I^{n-1}, \\ g(2t - 1, x) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, x \in I^{n-1}. \end{cases}$$

Dotado con esta operación, el conjunto de clases de homotopía relativa de esferoides relativos n -dimensionales es un grupo.

Definición 2.7. $\pi_n(X, A, x_0)$ es el n -ésimo grupo de homotopía relativa del par (X, A) con punto base x_0 .

Definición 2.8. Sean X un espacio topológico y $x_0 \in X$. El n -ésimo grupo de homotopía de X con punto base x_0 es el grupo $\pi_n(X, x_0) := \pi_n(X, \{x_0\}, x_0)$.

En este caso un esferoide relativo n -dimensional envía toda la frontera del cubo I^n al punto base x_0 . Si colapsamos la frontera del cubo I^n a un punto, queda un espacio homeomorfo a S^n . Por lo tanto el n -ésimo grupo de homotopía de X con punto base es isomorfo al grupo de clases de aplicaciones $f: S^n \rightarrow X$ que envían un punto base de S^n a x_0 módulo homotopía constante en el punto base.

Visto así, dadas $[f], [g] \in \pi_n(X, x_0)$, la suma $[f] + [g]$ es la clase de homotopía de la aplicación obtenida de contraer el ecuador que pasa por el punto base de S^n obteniendo la unión puntual de dos S^n y componer con f en una de las esferas y g en la otra.

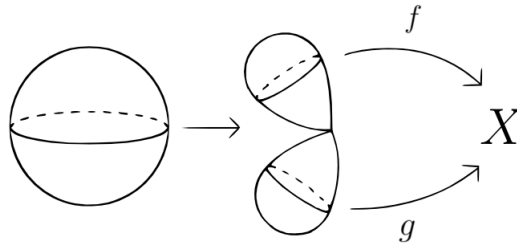


Figura 2: Suma $f + g$ en $\pi_2(X)$

Si X es arcoconexo, dados dos puntos base arbitrarios $x_0, y_0 \in X$, los grupos de homotopía $\pi_n(X, x_0)$ y $\pi_n(X, y_0)$ son isomorfos, por lo que en general cuando X sea arcoconexo omitiremos el punto base en la notación y escribiremos $\pi_n(X)$.

Si $n = 1$ esta definición coincide con la definición de grupo fundamental. A diferencia del grupo fundamental, los grupos de homotopía con $n > 1$ son siempre abelianos.

Lema 2.9. (Criterio de compresión) Sea $[f] \in \pi_n(X, A, x_0)$. Entonces $[f] = 0$ si, y solo si, f es homótopa relativamente a una aplicación con imagen contenida en A .

Demostración: Si $[f] = 0$, f es homótopa a la aplicación constante. Si f tiene la imagen contenida en A , podemos considerar la homotopía

$$\begin{aligned} F : I^n \times I &\longrightarrow X \\ (x, t) &\longmapsto f(tx). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f \simeq x_0$. □

2.2. Sucesión exacta asociada a un fibrado

Sean (X, A, x_0) y (Y, B, y_0) dos pares de espacios topológicos y $f: X \rightarrow Y$ una aplicación continua tal que $f(A) \subset B$ y $f(x_0) = y_0$. Entonces se induce un morfismo de grupos

$$\begin{aligned} f_* : \pi_n(X, A, x_0) &\longrightarrow \pi_n(Y, B, y_0) \\ [g] &\longmapsto [f \circ g] \end{aligned}$$

Teorema 2.10. Dado un par de espacios topológicos (X, A) con punto base x_0 se tiene una sucesión exacta

$$\begin{aligned} \cdots \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \cdots \\ \cdots \xrightarrow{j_*} \pi_2(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_1(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_1(X, A, x_0), \end{aligned}$$

donde i y j son los morfismos inducidos por las inclusiones y ∂ está definida como

$$\partial([f]) = [f|_{I^{n-1} \times \{0\}}].$$

Demostración: Del criterio de compresión se deduce que $\text{Im } i_* = \text{Ker } j_*$.

Si $[f] \in \pi_n(X, A, x_0)$, entonces f define una homotopía $f|_{I^n \times \{0\}} \simeq f|_{I^n \times \{1\}}$. Por lo tanto $i_*\partial([f]) = 0$. Recíprocamente, si $i_*[f] = 0$ existe una homotopía F para $f \simeq x_0$ y $\partial[F] = [f]$. Por lo tanto $\text{Im } \partial = \text{Ker } i_*$.

Si $[f] \in \pi_n(X, x_0)$, entonces $\partial[f] = 0$ puesto que $f|_{I^{n-1} \times \{0\}} = x_0$. Por lo tanto, $\partial j_* = 0$. Además, si $\partial[f] = 0$ y F es una homotopía $f|_{I^n \times \{0\}} \simeq x_0$, podemos considerar

$$G(x, t) = \begin{cases} f(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, x \in I^{n-1}, \\ F(x, 2t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, x \in I^{n-1}, \end{cases}$$

y tenemos que $j_*[G] = [f]$, por lo que $\text{Ker } j_* = \text{Im } \partial$. \square

Como consecuencia de la propiedad de elevación de homotopías de los fibrados respecto los cubos I^n tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.11. Sean (E, B, F, p) un fibrado, $x_0 \in E$ y $F = p^{-1}(p(x_0))$. Entonces $p_*: \pi_n(E, F, x_0) \rightarrow \pi_n(B, p(x_0))$ es un isomorfismo.

Demostración: Veamos que p_* es exhaustiva. Si $[f] \in \pi_n(B, p(x_0))$, podemos pensar f como una homotopía. Como $f|_{I^{n-1} \times \{0\}} = x_0$ factoriza por E , existe una elevación \tilde{f} de f . Como $f(\partial I^n) = p(x_0)$, $\tilde{f}(\partial I^n) \subset F$, y entonces $[\tilde{f}] \in \pi_n(E, F, x_0)$ con $p_*([\tilde{f}]) = [f]$.

Para ver la inyectividad supongamos que $p_*([f_0]) = p_*([f_1])$. Sea $G: I^n \times I \rightarrow B$ una homotopía relativa entre pf_0 y pf_1 . Consideramos

$$\tilde{G}: I^n \times \{0, 1\} \cup \partial(I^n \setminus I^{n-1} \times \{0\}) \times I \rightarrow E$$

definida en $I^n \times \{0\}$ como f_0 , en $I^n \times \{1\}$ como f_1 y como la aplicación constante x_0 en $(\partial I^n \setminus I^{n-1} \times \{0\}) \times I$. Tenemos que $p \circ \tilde{G}$ nos da la restricción de G en $I^n \times \{0, 1\} \cup \partial(I^n \setminus I^{n-1} \times \{0\}) \times I$. De la misma forma que en la demostración de la propiedad de elevación de homotopías para los fibrados, podemos extender $\tilde{G}_0 = f_0$ a una homotopía \tilde{G} entre f_0 y f_1 , por lo que $[f_0] = [f_1]$ y p_* es inyectiva. \square

Corolario 2.12. Para todo fibrado (E, B, F, p) existe una sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(F) \longrightarrow \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \longrightarrow \pi_{n-1}(F) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \pi_1(B).$$

Consideremos ahora la aplicación $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ definida como $p(t) = e^{it}$. Esta aplicación es un fibrado con fibra \mathbb{Z} . De la sucesión exacta asociada al fibrado obtenemos

$$0 = \pi_n(\mathbb{Z}) \longrightarrow \pi_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \pi_n(S^1) \longrightarrow \pi_{n-1}(\mathbb{Z}) = 0$$

para $n \geq 2$. Como \mathbb{Z} es un espacio discreto, sus grupos de homotopía son triviales. Por lo tanto $\pi_n(S^1) \cong \pi_n(\mathbb{R})$ para $n \geq 2$. Como \mathbb{R} es contráctil, $\pi_n(\mathbb{R})$ es trivial para todo n y tenemos que $\pi_n(S^1) = 0$ para $n \geq 2$.

De hecho, si se tiene un fibrado $p: E \rightarrow B$ con fibra un conjunto discreto, se dice que E es un *espacio recubridor* de B y p un *recubrimiento*. En general si E es un espacio recubridor de B se cumple que $\pi_n(B) \cong \pi_n(E)$ para $n \geq 2$.

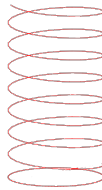


Figura 3: Recubrimiento de S^1 por \mathbb{R}

Además, veremos más adelante que $\pi_n(S^n) = \langle [\text{Id}_{S^n}] \rangle \cong \mathbb{Z}$, de donde se deduce el siguiente corolario.

Corolario 2.13. $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ y está generado por el fibrado de Hopf.

Demostración: De la sucesión exacta larga asociada a η se obtiene el isomorfismo

$$0 \longrightarrow \pi_3(S^3) \longrightarrow \pi_3(S^2) \longrightarrow 0$$

inducido por η . Por lo tanto $\eta_*[\text{Id}_{S^3}] = [\eta]$ genera $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$. □

3. El fibrado de Hopf y $\pi_{n+1}(S^n)$

Hemos visto que $\pi_3(S^2)$ está generado por el fibrado de Hopf y es isomorfo al grupo aditivo de los enteros. En esta sección veremos qué relación hay entre este grupo y los grupos de homotopía $\pi_{n+1}(S^n)$. Como hemos comentado antes, los grupos de homotopía $\pi_n(S^1)$ son triviales para $n \geq 2$, por lo que $\pi_2(S^1) = 0$. Para ver los casos $n > 3$ empezamos definiendo la suspensión de un espacio topológico.

Sea X un espacio topológico. Definimos la siguiente relación de equivalencia en $X \times I$:

$$(x, t) \sim (y, t') \iff t = t' = 0 \text{ o } t = t' = 1.$$

La *suspensión de X* es el espacio topológico $\Sigma X := X \times I / \sim$. Por ejemplo la suspensión de S^n es $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$.

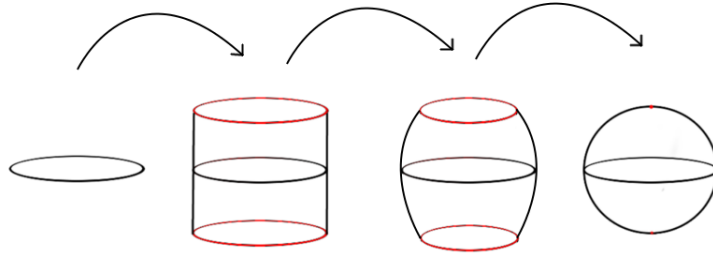


Figura 4: Suspensión de S^1

Dados X e Y dos espacios topológicos y $f: X \rightarrow Y$ una aplicación continua, se define la *suspensión de f* como la aplicación

$$\begin{aligned} \Sigma f : \Sigma X &\longrightarrow \Sigma Y \\ [x, t] &\longmapsto [f(x), t]. \end{aligned}$$

Además dadas f y g dos aplicaciones continuas, si $f \simeq g$, entonces $\Sigma f \simeq \Sigma g$ y $\Sigma(f + g) \simeq \Sigma f + \Sigma g$ y por lo tanto la suspensión define un morfismo de grupos

$$\begin{aligned} \Sigma : \pi_n(X) &\longrightarrow \pi_{n+1}(\Sigma X) \\ [f] &\longmapsto [\Sigma f]. \end{aligned}$$

En particular $\Sigma : \pi_{n+k}(S^n) \rightarrow \pi_{n+k+1}(S^{n+1})$ es un morfismo de grupos. Y veremos el siguiente resultado de Freudenthal.

Teorema 3.1. (Teorema de suspensión de Freudenthal) *El morfismo*

$$\Sigma : \pi_{n+k}(S^n) \rightarrow \pi_{n+k+1}(S^{n+1})$$

es epimorfismo para $n \geq k + 1$ e isomorfismo para $n > k + 1$.

Por lo tanto tenemos que la iteración de suspensiones eventualmente estabiliza. Al grupo en que estabiliza se le llama *k-ésimo grupo de homotopía estable* y se denota por π_k^s .

El objetivo del resto del trabajo es ver que $\pi_1^s \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, es decir, $\pi_{n+1}(S^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ para $n \geq 3$ y está generado por una suspensión del fibrado de Hopf.

Para ello usaremos la construcción de Pontryagin-Thom, un resultado clásico que conecta los grupos de homotopía de las esferas con la teoría de cobordismo. Pero primero necesitamos establecer unos resultados previos del ámbito de la topología diferencial.

3.1. Entornos tubulares, aproximación diferencial y el teorema de Sard

En esta sección daremos definiciones y algunos resultados técnicos necesarios para la construcción de Pontryagin-Thom. No daremos la demostración de todos los resultados ya que algunos se escapan del contexto en el que estamos. De todos modos, las demostraciones se pueden encontrar detalladas en [2] y [7].

Definición 3.2. Sea $M_n^k \subset \mathbb{R}^{n+k}$ una variedad diferenciable k -dimensional y sea $p \in M_n^k$. El espacio vectorial

$$N_p M_n^k = \{(p, x) \in M \times \mathbb{R}^{n+k} \mid x \in (T_p M_n^k)^\perp\}$$

se llama *espacio normal* a $p \in M_n^k$.

Definición 3.3. El espacio $N_{M_n^k} = \bigcup_{p \in M_n^k} N_p M_n^k$ se llama *fibrado normal* sobre M_n^k .

Teorema 3.4. (Teorema del entorno tubular) Sea M una variedad diferenciable n -dimensional compacta y sin borde en \mathbb{R}^{n+k} . Entonces existe un entorno $N \subset \mathbb{R}^{n+k}$ de M tal que $M \times \mathbb{R}^n$ es difeomorfa a N .

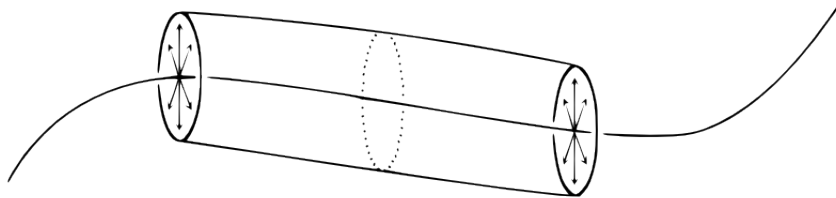


Figura 5: Entorno tubular

De hecho podemos tomar tal difeomorfismo $\phi: N \rightarrow M \times \mathbb{R}^n$ de forma que la imagen de $p \in M$ sea $(p, 0)$ y si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^n , $\phi^{-1}(\{(p, e_1), \dots, (p, e_n)\})$ sea base de $N_p M$.

Demostración: Definimos $g(p, t_1, \dots, t_n) = p + t_1 v_1(p) + \dots + t_n v_n(p)$ donde

$$\{v_1(p), \dots, v_n(p)\}$$

es base del espacio normal en p . Como $dg_{(p,0,\dots,0)}$ es no singular, g es un difeomorfismo entre un entorno de $(p, 0, \dots, 0)$ y un abierto de \mathbb{R}^{n+k} . Veamos que g da un difeomorfismo en $M \times B_\epsilon(0)$ para un $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño.

En caso de que este ϵ no existiese, existirían $(p, v) \neq (p', v')$ en $M \times B_\epsilon(0)$ con $\|v\|, \|v'\|$ arbitrariamente pequeños tales que $g(p, v) = g(p', v')$. Como M es compacta podemos tomar sucesiones (p_n, v_n) y (p'_n, v'_n) tales que $g(p_n, v_n) = g(p'_n, v'_n)$ y

$$\begin{aligned} p_n &\rightarrow p, \quad v_n \rightarrow 0, \\ p'_n &\rightarrow p', \quad v'_n \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto necesariamente $p = p'$ y esto contradice que g sea difeomorfismo en un entorno de $(p, 0, \dots, 0)$. Como $B_\epsilon(0)$ es difeomorfo a \mathbb{R}^n , tenemos un difeomorfismo entre $M \times \mathbb{R}^n$ y un entorno de M . \square

Teorema 3.5. (Teorema de Sard) Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable. Sea C el conjunto

$$C = \{x \in U \mid \text{rang}(df_x) < m\}.$$

Entonces el conjunto de valores críticos $f(C)$ tiene medida de Lebesgue 0.

Demostración: [7, p. 16–19].

Definición 3.6. Sea $f: M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. Decimos que $y \in N$ es un *valor regular* de f si para todo $x \in f^{-1}(y)$ se cumple que $\text{rang}(df_x) = \dim N$.

Teorema 3.7. Sean M y N dos variedades diferenciables de dimensiones $m \geq n$ y $f: M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. Si $y \in N$ es un valor regular, entonces $f^{-1}(y)$ es una variedad diferenciable de dimensión $m - n$.

Demostración: Sea $x \in f^{-1}(y)$. Como y es un valor regular, la aplicación $df_x: T_x M \rightarrow T_y N$ es exhaustiva y tiene núcleo de dimensión $m - n$. Supongamos que $M \subset \mathbb{R}^k$ y tomamos una aplicación lineal $L: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$ tal que el núcleo de df_x no interseque el núcleo de L .

Definimos la aplicación $F: M \rightarrow N \times \mathbb{R}^{m-n}$ como

$$F(x) = (f(x), L(x)).$$

Tenemos que la diferencial de F en x es $dF_x(v) = (df_x(v), L(v))$ y por lo tanto es no singular. Entonces F define un difeomorfismo entre un entorno U de x y un entorno V de $(y, L(x))$. En concreto $F(U) = (y \times \mathbb{R}^{m-n}) \cap V$. \square

Además en este caso tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(y) & \xrightarrow{i} & M \\ \downarrow & & \downarrow f \\ y & \longrightarrow & N \end{array}$$

Por lo tanto, df_x tiene núcleo $T_x f^{-1}(y)$ e induce un isomorfismo entre $N_x f^{-1}(y)$ y $T_y M$.

Teorema 3.8. (Teorema de aproximación diferenciable) Sean $M \subset \mathbb{R}^m$, $N \subset \mathbb{R}^n$ dos variedades diferenciables con N compacta. Si $f: M \rightarrow N$ es una aplicación continua entonces f es homótopa a una aplicación diferenciable. Además si f, g son dos aplicaciones diferenciables homótopas, entonces existe una homotopía diferenciable de f a g .

Demostración: [2, p. 97].

Por lo tanto podemos pensar $\pi_n(S^m)$ como el grupo de clases de homotopía diferenciable entre aplicaciones diferenciables de S^n a S^m .

Corolario 3.9. Toda aplicación continua $f: S^n \rightarrow S^m$ con $n < m$ es homótopa a la aplicación constante, es decir, $\pi_n(S^m) = 0$.

Demostración: Supongamos que $f: S^n \rightarrow S^m$ es diferenciable. Por el teorema de Sard f no puede ser exhaustiva. Sea $p \in S^m$ un punto que no está en la imagen. La aplicación tiene imagen contenida en $S^m \setminus \{p\}$, que es contráctil, y por lo tanto f es homótopa a la aplicación constante. \square

Corolario 3.10. $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ está generado por la identidad $S^n \rightarrow S^n$.

Demostración: $\Sigma: \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_2(S^2)$ es exhaustiva y por lo tanto $\pi_2(S^2)$ es cíclico y generado por $\Sigma[\text{Id}_{S^1}] = [\text{Id}_{S^2}]$. Además, de la sucesión exacta asociada al fibrado de Hopf se obtiene

$$0 \longrightarrow \pi_2(S^2) \longrightarrow \pi_1(S^1) \longrightarrow 0.$$

Por lo tanto $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$. Como $\Sigma: \pi_n(S^n) \rightarrow \pi_{n+1}(S^{n+1})$ es isomorfismo para $n \geq 2$, tenemos que $\pi_n(S^n) = \langle [\text{Id}_{S^n}] \rangle \cong \mathbb{Z}$. \square

3.2. La construcción de Pontryagin-Thom

En esta sección introducimos el cobordismo con referencias entre variedades diferenciables cerradas y veremos, a través de la construcción de Pontryagin-Thom, qué relación tiene con los grupos de homotopía de las esferas.

Definición 3.11. Sea $M_n^k \subset \mathbb{R}^n$ una variedad diferenciable k -dimensional. Una *referencia móvil* sobre M_n^k es una aplicación diferenciable

$$\mathcal{F} : M_n^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow N_{M_n^k}$$

tal que, para todo $p \in M_n^k$,

$$\mathcal{F}|_{\{p\} \times \mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \rightarrow N_p M_n^k$$

es isomorfismo de espacios vectoriales.

Definición 3.12. Una *variedad diferenciable k -dimensional con referencias* es un par (M_n^k, \mathcal{F}) donde $M_n^k \subset \mathbb{R}^n$ es una variedad diferenciable k -dimensional compacta sin borde y \mathcal{F} es una referencia móvil sobre M_n^k .

Definición 3.13. Sean (M_n^k, \mathcal{F}_0) y (N_n^k, \mathcal{F}_1) dos variedades diferenciables k -dimensionales con referencias. Diremos que son *cobordantes con referencias* si existe una $(k+1)$ -variedad diferenciable $C_{n+1}^{k+1} \subset \mathbb{R}^n \times I$ y una referencia móvil \mathcal{F} sobre C_{n+1}^{k+1} tales que:

1. $\partial C_{n+1}^{k+1} = M_n^k \times [0, \epsilon] \cup N_n^k \times [\epsilon, 1]$,
2. $\mathcal{F}|_{M_n^k \times \{0\}} = \mathcal{F}_0$ y $\mathcal{F}|_{N_n^k \times \{1\}} = \mathcal{F}_1$,

para algún $\epsilon > 0$.

A la variedad C_{n+1}^{k+1} la llamaremos *cobordismo* entre M_n^k y N_n^k .

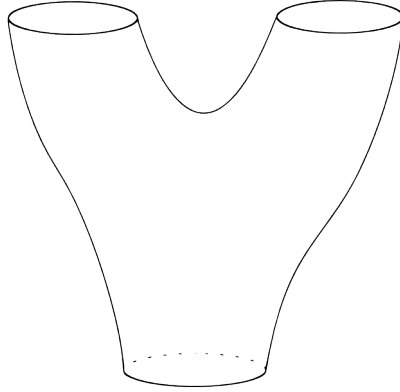


Figura 6: Un cobordismo

Ser cobordantes con referencias define una relación de equivalencia. Denotaremos por $\Omega_k^{\text{fr}}(\mathbb{R}^{n+k})$ el conjunto de clases de equivalencia $[(M_n^k, \mathcal{F})]$ de variedades diferenciables k -dimensionales con referencia móvil en \mathbb{R}^{n+k} .

Dadas $[(M, \mathcal{F})], [(N, \mathcal{G})] \in \Omega_k^{\text{fr}}(\mathbb{R}^{n+k})$, se define $[(M, \mathcal{F})] + [(N, \mathcal{G})]$ como la clase de cobordismo con referencias de la unión disjunta de M y N dotada de la referencia móvil inducida por las referencias \mathcal{F} y \mathcal{G} . Con esta operación $\Omega_k^{\text{fr}}(\mathbb{R}^{n+k})$ es un grupo abeliano.

Denotamos $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ y $S^{n+k} = \mathbb{R}^{n+k} \cup \{\infty\}$ y escogemos ∞ como punto base de S^n y S^{n+k} respectivamente.

Sea $[f] \in \pi_{n+k}(S^n)$. Colapsando un entorno del punto base, podemos suponer que f envía un entorno del punto base de S^{n+k} al punto base de S^n . Por lo tanto podemos pensar f como una aplicación $f: \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow S^n$ que es constante al punto base fuera de un compacto de \mathbb{R}^{n+k} . Por el teorema de aproximación diferenciable, podemos suponer que f es diferenciable.

Sea $y \in \mathbb{R}^n$ un valor regular. Consideramos $M_n^k = f^{-1}(y)$ una variedad diferenciable k -dimensional compacta sin borde y construimos una referencia móvil sobre M_n^k de la siguiente manera: tomamos una base positivamente orientada $\{w_1, \dots, w_n\}$ del espacio tangente $T_y S^n$. Para todo $x \in M_n^k$, la diferencial df_x tiene núcleo el espacio tangente a x y por lo tanto define un isomorfismo entre $N_x M_n^k$ y $T_y S^n$. Sean $\{v_1(x), \dots, v_n(x)\}$ tales que $df_x(v_i(x)) = w_i$. Tomamos la siguiente referencia móvil sobre M_n^k

$$\mathcal{F}(x, \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = (x, \lambda_1 v_1(x) + \dots + \lambda_n v_n(x)).$$

A la variedad k -dimensional con referencias (M_n^k, \mathcal{F}) la llamaremos *construcción de Pontryagin-Thom* asociada a f .

Teorema 3.14. *La construcción de Pontryagin-Thom nos da un isomorfismo de grupos entre $\pi_{n+k}(S^n)$ y $\Omega_k^{\text{fr}}(\mathbb{R}^{n+k})$.*

Demostración: Daremos un resumen de la demostración. Esta se puede encontrar completa en [7].

Primero se comprueba que la construcción no depende de la elección del representante de la clase de homotopía. Si y es un valor regular de f , entonces existe otro valor regular de f suficientemente cerca tal que las construcciones de Pontryagin-Thom asociadas sean cobordantes con referencias.

Si g es homótopa a f e y es un valor regular de ambas, se puede tomar una homotopía diferenciable $F: S^{n+k} \times I \rightarrow S^n$ tal que z sea un valor regular de F suficientemente cerca de y para que también lo sea de g y f y las construcciones asociadas a los valores regulares y, z de f y g sean cobordantes con referencias. Entonces la construcción de Pontryagin-Thom asociada a F con el valor regular z nos da un cobordismo con referencias entre las construcciones de Pontryagin-Thom de f y g asociadas a z . Por transitividad las construcciones asociadas a y también son cobordantes con referencias.

Para ver que no depende de la elección de la base positivamente orientada de $T_y S^n$, dadas dos bases positivamente orientadas se puede tomar una curva diferenciable entre ellas y esta induce una referencia móvil sobre el cobordismo $f^{-1}(y) \times I$.

Dados dos valores regulares y, z de f , se construye una homotopía diferenciable entre f y otra aplicación g tal que y es valor regular de g y la construcción de

Pontryagin-Thom asociada a g con el valor regular y nos da la construcción asociada a f con el valor regular z . Como f y g son homótopas e y es valor regular de ambas, sus construcciones asociadas al valor regular y son cobordantes con referencias. Por lo tanto la construcción no depende de la elección del valor regular.

Veamos que es exhaustiva. Sea (M_n^k, \mathcal{F}) una variedad diferenciable con referencias. Por el teorema del entorno tubular, para un entorno abierto N de M_n^k existe un difeomorfismo $\tilde{f}: N \rightarrow M_n^k \times \mathbb{R}^n$ tal que $\tilde{f}(x) = (x, 0)$ para todo $x \in M_n^k$. Sea $f: S^{n+k} \rightarrow S^n$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} \pi(\tilde{f}(x)) & \text{si } x \in N, \\ \infty & \text{si } x \notin N, \end{cases}$$

donde π es la proyección sobre \mathbb{R}^n . Definida así, $0 \in S^n$ es un valor regular y la construcción de Pontryagin-Thom asociada a f es exactamente (M_n^k, \mathcal{F}) . Por lo tanto ϕ es exhaustiva.

Para ver la inyectividad, consideremos f y g dos aplicaciones cuyas construcciones sean cobordantes con referencias y $(C_{n+1}^{k+1}, \mathcal{G})$ un cobordismo con referencias entre ellas. Tomando un entorno tubular de C_{n+1}^{k+1} se induce una homotopía entre f y g de forma similar al argumento de la exhaustividad.

Si $[f], [g] \in \pi_{n+k}(S^n)$, $f + g$ es la aplicación que resulta de contraer el ecuador que pasa por el punto base de S^{n+k} para obtener la unión puntual de dos copias de S^{n+k} y componer con f y g en cada una de ellas. Entonces la antiimagen de un valor regular de $f + g$ nos daría la antiimagen de un valor regular de f en una de las esferas y la antiimagen de g en la otra, es decir, la construcción de Pontryagin-Thom de $f + g$ nos daría la unión disjunta de las construcciones de Pontryagin-Thom de f y g respectivamente, de donde se deduce que ϕ es morfismo de grupos. \square

En conclusión, calcular los grupos de homotopía $\pi_{n+1}(S^n)$ es equivalente a calcular los grupos de clases de cobordismo de 1-variedades diferenciables con referencias inmersas en \mathbb{R}^{n+1} .

3.3. Teorema de suspensión de Freudenthal

En esta sección demostraremos el teorema de suspensión de Freudenthal para las aplicaciones entre esferas (Teorema 3.1). Primero definimos la suspensión de variedades diferenciables con referencia móvil.

Sea (M_n^k, \mathcal{F}) una variedad k -dimensional con referencia móvil. Denotamos por SM_n^k la variedad diferenciable k -dimensional imagen de M_n^k por la inclusión estándar $\mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^{n+k+1}$.

Sean $\{e_1, \dots, e_{n+k}\} \subset \mathbb{R}^{n+k}$ y $\{e_1, \dots, e_{n+k+1}\} \subset \mathbb{R}^{n+k+1}$ las bases canónicas. Definimos una referencia móvil $S\mathcal{B}$ sobre SM_n^k de la siguiente manera: si $i \in \{1, \dots, n+k\}$,

$$S\mathcal{B}(x, e_i) = \mathcal{B}(x, e_i);$$

si $i = n + k + 1$,

$$S\mathcal{B}(x, e_{n+k+1}) = e_{n+k+1}.$$

Pasando a clases de cobordismo con referencias, S define un morfismo de grupos

$$S : \Omega_k^{\text{fr}}(\mathbb{R}^{n+k}) \rightarrow \Omega_k^{\text{fr}}(\mathbb{R}^{n+k+1})$$

y tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi_{n+k}(S^n) & \xleftarrow{\phi} & \Omega_k^{\text{fr}}(\mathbb{R}^{n+k}) \\ \downarrow \Sigma & & \downarrow S \\ \pi_{n+k+1}(S^{n+1}) & \xleftarrow{\phi} & \Omega_k^{\text{fr}}(\mathbb{R}^{n+k+1}) \end{array}$$

Por lo tanto, esta definición de suspensión es equivalente a la que hemos dado al principio de la sección. Podemos reformular el teorema de suspensión de Freudenthal como:

Teorema 3.15. (Teorema de suspensión de Freudenthal) *El morfismo*

$$S : \Omega_k^{\text{fr}}(\mathbb{R}^{n+k}) \rightarrow \Omega_k^{\text{fr}}(\mathbb{R}^{n+k+1})$$

es epimorfismo para $n \geq k + 1$ e isomorfismo para $n > k + 1$.

Demostración: Supongamos que $n > k$ y sea (M_{n+1}^k, \mathcal{F}) una variedad diferenciable k -dimensional con referencias en \mathbb{R}^{n+k+1} . Podemos suponer que \mathcal{F} da una base ortonormal en cada punto de M_{n+k+1}^k .

Consideremos la aplicación

$$\sigma : TM_{n+1}^k \rightarrow \mathbb{RP}^{n+k+1}$$

que envía cada vector tangente a un punto en M_{n+1}^k a su clase en \mathbb{RP}^{n+k+1} . Como $n > k$, la imagen de σ tiene medida de Lebesgue cero.

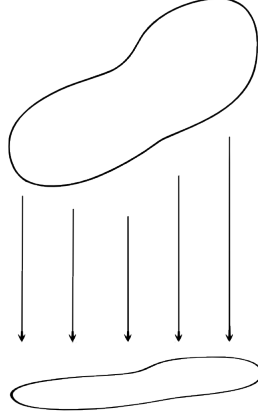
Sea $\Delta = \{(x, x) \mid x \in M_{n+1}^k\}$. Consideramos la aplicación

$$\tau : (M_{n+1}^k \times M_{n+1}^k) \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{RP}^{n+k+1}$$

que envía cada par $x, y \in M_{n+1}^k$ a la clase del vector $x - y$ en \mathbb{RP}^{n+k+1} . Por el teorema de Sard, la imagen tiene medida de Lebesgue cero. Por lo tanto existe un vector que no es tangente a ningún punto de M_{n+k+1}^k ni paralelo a ningún vector $x - y$ para $x, y \in M_{n+k+1}^k$ dos puntos distintos. Rotando la variedad M_{n+1}^k podemos suponer que este vector es $e = (0, \dots, 0, 1)$.

Sea $p \mapsto (x_1(p), \dots, x_{n+k+1}(p))$ un embedding de M_{n+1}^k en \mathbb{R}^{n+k+1} . La aplicación $\phi(p, t) = (x_1(p), \dots, x_{n+k}(p), tx_{n+k+1}(p), t)$ induce un cobordismo con referencias entre M_{n+1}^k y una variedad diferenciable $N_n^k \subset \mathbb{R}^{n+k} \times \{0\}$.

Por lo tanto podemos suponer que M_{n+1}^k está incluida en \mathbb{R}^{n+k} . En consecuencia, el espacio tangente en cada punto también lo está. Por lo tanto $e = e_{n+k+1}$ es un



vector normal a todos los puntos de M_{n+1}^k . Dado $x \in M_{n+1}^k$, definimos $\theta(x)$ como e expresado en la base de la referencia en x . De esta forma definimos una aplicación $\theta: M_{n+1}^k \rightarrow S^n$. Como $n > k$, por el teorema de Sard θ no puede ser exhaustiva. Rotando la referencia móvil en cada punto, podemos suponer que $-v(x) \neq e$ donde $v(x)$ es el último vector de la referencia en $x \in M_{n+1}^k$.

Como $-v(x) \neq e$ podemos rotar el plano generado por e y $v(x)$ en cada referencia y definir una homotopía entre la referencia móvil \mathcal{F} y una referencia móvil \mathcal{G} que tiene como último vector en cada punto e de la siguiente forma.

Dado $x \in M_{n+1}^k$ podemos considerar $w(x) = (e + v(x))/\|e + v(x)\|$. Definimos $T_w(u) = 2\langle u, w \rangle w - u$. Sea $R_w: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ la rotación dada por la fórmula $R_w(u) = T_e(T_w(u))$. Sea

$$w_t(x) = \frac{te + (1-t)w(x)}{\|te + (1-t)w(x)\|}.$$

Entonces la familia de rotaciones R_{w_t} nos da una homotopía entre la referencia móvil original y una con e como el último vector de la referencia en cada punto.

De esta homotopía se induce un cobordismo entre $M_{n+1}^k \subset \mathbb{R}^{n+k} \times \{0\}$ con la referencia móvil \mathcal{F} y (M_{n+1}^k, \mathcal{G}) con una referencia móvil \mathcal{G} que tiene como último vector e en la referencia de cada punto. Por lo tanto, como $[(M_{n+1}^k, \mathcal{G})]$ es la suspensión de una variedad N_n^k con referencias, S es exhaustiva.

Para la inyectividad en $n > k+1$, dado un cobordismo con referencias en $\mathbb{R}^{n+k+1} \times I$, repitiendo un argumento similar al anterior, podemos construir un cobordismo con referencias en $\mathbb{R}^{n+k} \times I$ y por lo tanto S es inyectiva. \square

3.4. El morfismo J_1

Ver que $\pi_{n+1}(S^n)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ para $n > 3$ es equivalente a comprobarlo para $\Omega_1^{\text{fr}}(\mathbb{R}^{n+1})$. Para ver esto introduciremos el J_1 -morfismo, un isomorfismo entre el grupo fundamental de $SO(n)$ y $\Omega_1^{\text{fr}}(\mathbb{R}^{n+1})$.

El grupo de las rotaciones del plano $SO(2)$ es homeomorfo a S^1 . Por lo tanto $\pi_1(SO(2)) \cong \mathbb{Z}$. Como $SO(3)$ es homeomorfo a \mathbb{RP}^3 , tenemos que $\pi_1(SO(3)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y está generado por la clase de homotopía de un lazo $e^{2\pi it} \mapsto R_{2\pi t}$ donde R_w es la rotación de ángulo w entorno a un eje fijado ([2, p. 164–165]). Una forma de

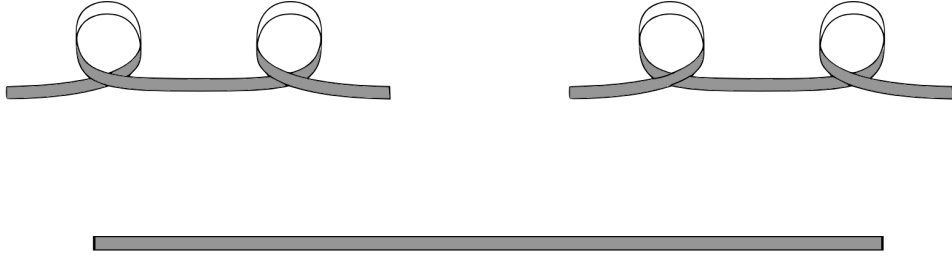


Figura 7: Truco del cinturón

entender el grupo fundamental de las rotaciones en \mathbb{R}^3 es con el truco del cinturón. Este truco consiste en dar dos vueltas a un extremo de un cinturón y mantener fijo el otro extremo. Una vez en esta situación, sin rotar los extremos, uno puede deshacer el cinturón y dejarlo plano otra vez. Dando dos vueltas completas al cinturón, este queda una situación como en el de la primera imagen. Pasando el extremo izquierdo por delante sin rotarlo, el cinturón queda en una situación como en la de la segunda imagen. Una vez en esta situación, estirando los extremos el cinturón queda plano.

Esto se debe a que el lazo en $SO(3)$ que da una vuelta completa entorno a un eje es el generador de $\pi_1(SO(3))$ y tiene orden dos. El truco del cinturón representa una homotopía entre 2 veces el generador de $\pi_1(SO(3))$ y el lazo trivial.

Además la aplicación $SO(n+1) \rightarrow S^n$ que asigna a cada matriz de una rotación la primera columna es un fibrado con fibra $SO(n)$ ([9, p. 263]), y de la sucesión exacta larga asociada se obtiene

$$0 = \pi_2(S^n) \longrightarrow \pi_1(SO(n)) \longrightarrow \pi_1(SO(n+1)) \longrightarrow \pi_1(S^n) = 0.$$

Por lo tanto tenemos

$$\pi_1(SO(n)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 2, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

Sea M_2^1 la circunferencia unidad en \mathbb{R}^2 con la referencia móvil \mathcal{F}_2 dada por el vector normal hacia fuera en cada punto. Sea (M_k^1, \mathcal{F}_k) la suspensión $(k-2)$ -ésima de

(M_2^1, \mathcal{F}_2) para $k \geq 3$. Para cada $\theta: M_{n+1}^1 \rightarrow SO(n)$, definimos $J_1^n([\theta])$ como la clase de cobordismo con referencias $[(M_{n+1}^1, \mathcal{F}_{n+1}^\theta)]$, donde $\mathcal{F}_{n+1}^\theta(x, v) = \mathcal{F}(x, \theta(x)(v))$.

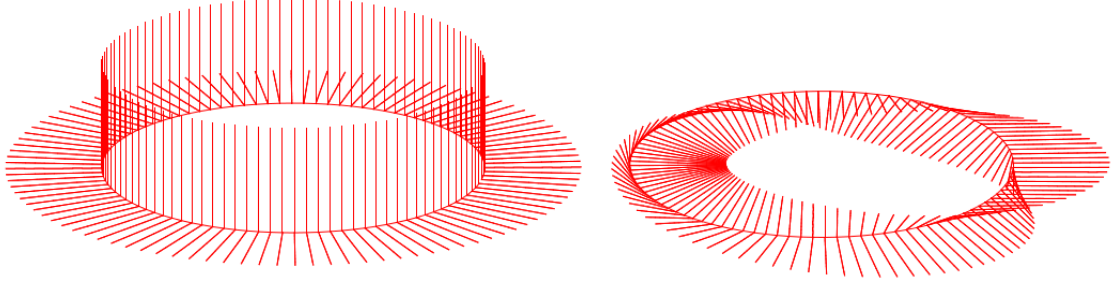


Figura 8: $J_1^2(0)$ y $J_1^2(1)$

Si dos lazos $M_{n+1}^1 \rightarrow SO(n)$ son homótopos, se puede definir una referencia móvil inducida por una homotopía diferenciable sobre el cobordismo $M_{n+1}^1 \times I$, por lo tanto J_1^n está bien definido.

La aplicación J_1^n es un morfismo de grupos ya que podemos construir un cobordismo con referencias como en el de la siguiente imagen:

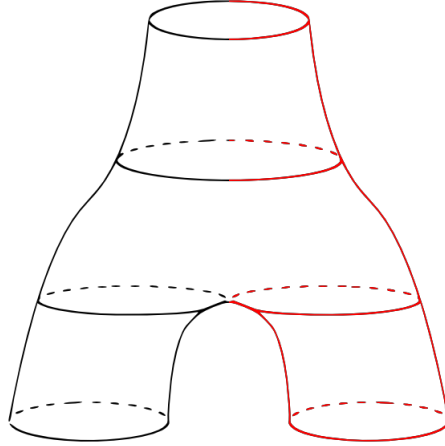


Figura 9: Cobordismo entre $J_1^n([\alpha] + [\beta])$ y $J_1([\alpha]) + J_1([\beta])$, en negro se representa el fibrado normal inducido por α y en rojo el fibrado normal inducido por β

Además tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(SO(2)) & \xrightarrow{J_1^2} & \Omega_1^{\text{fr}}(\mathbb{R}^3) \\ \downarrow i_* & & \downarrow S \\ \pi_1(SO(n)) & \xrightarrow{J_1^n} & \Omega_1^{\text{fr}}(\mathbb{R}^{n+1}) \end{array}$$

Calculando explícitamente la construcción de Pontryagin-Thom asociada al fibrado de Hopf se obtiene una 1-variedad diferenciable con referencias cobordante a $J_1^2(1)$ y por lo tanto J_1^2 es isomorfismo.

Por el teorema de suspensión de Freudenthal, S es exhaustiva. Como J_1^2 es isomorfismo e i_* es exhaustiva, por conmutatividad del diagrama tenemos que J_1^n es exhaustiva para todo n .

Como J_1^n es exhaustiva, toda variedad 1-dimensional con referencias en \mathbb{R}^{n+1} es cobordante con referencias a $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Por lo tanto cada clase de cobordismo corresponde a S^1 con una referencia móvil.

Para ver la inyectividad en $n > 3$ construimos un invariante de clases de cobordismo con referencias de 1-variedades de la siguiente manera.

Sea (M_n^1, \mathcal{F}) una 1-variedad con referencias en \mathbb{R}^{n+1} . Podemos suponer que en cada punto $x \in M_n^1$, $\{\mathcal{F}(x, e_1), \dots, \mathcal{F}(x, e_n)\}$ es una base ortonormal. Para cada punto $x \in M_n^1$ consideramos la matriz

$$\tau(x) = (u(x), \mathcal{F}(x, e_1), \dots, \mathcal{F}(x, e_n))$$

donde $u(x)$ es el único vector tangente a M_n^1 en x tal que $\det(\tau(x)) = 1$.

Definida así obtenemos una aplicación continua

$$\tau : M_n^1 \rightarrow SO(n+1).$$

Si M_n^1 tiene una componente conexa, definimos $\alpha(M_n^1, \mathcal{F}) = 0$ si τ es nulohomótopa y 1 en caso contrario. Si tiene más de una componente conexa, $\alpha(M_n^1, \mathcal{F})$ es la suma módulo 2 de α en cada una de las componentes conexas.

Sea $\delta(M_n^1, \mathcal{F}) = \alpha(M_n^1, \mathcal{F}) + p(M_n^1) \pmod{2}$ donde $p(M_n^1)$ es el número de componentes conexas de M_n^1 .

Teorema 3.16. *Si (M_n^1, \mathcal{F}) y (N_n^1, \mathcal{G}) son cobordantes con referencias, entonces $\delta(M_n^1, \mathcal{F}) = \delta(N_n^1, \mathcal{G})$.*

Por lo tanto δ es un invariante de clases de cobordismo con referencias de 1-variedades inmersas en \mathbb{R}^{n+1} . Daremos una idea de la demostración. La demostración completa se puede encontrar en [8].

Sea $(C_{n+1}^{k+1}, \mathcal{H})$ un cobordismo entre k -variedades con referencias. Decimos que $(x_0, t_0) \in C_{n+1}^{k+1}$ es un *valor crítico* de $(C_{n+1}^{k+1}, \mathcal{H})$ si el espacio tangente a (x_0, t_0) de C_{n+1}^{k+1} está incluido en $\mathbb{R}^{n+k} \times \{t_0\}$.

Si $(C_{n+1}^{k+1}, \mathcal{H})$ un cobordismo entre k -variedades con referencias, para cada $t_0 \in I$ llamamos *sección de C_{n+1}^{k+1} en t_0* a la variedad diferenciable $C_{n+1}^{k+1} \cap (\mathbb{R}^{n+k} \times \{t_0\})$. Diremos que una sección de un cobordismo con referencias es *crítica* si tiene algún valor crítico.

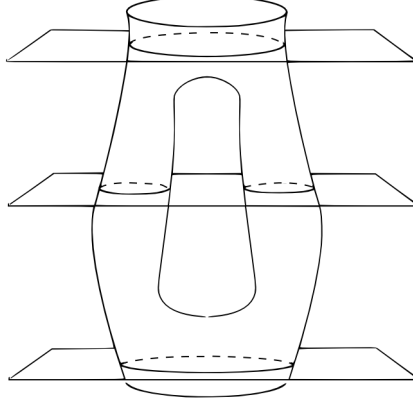


Figura 10: Secciones de un cobordismo

Demostración: Si (M_n^1, \mathcal{F}) y (N_n^1, \mathcal{G}) son dos 1-variedades cobordantes con referencias, podemos tomar un cobordismo (C_{n+1}^2, \mathcal{H}) entre ellas con un número finito de secciones críticas con un único valor crítico en cada una de ellas. Denotaremos por $M_{n,t}^1$ a la sección de C_{n+1}^2 a la altura t .

Si $\mathbb{R}^{n+1} \times (t_0, t_1) \cap C_{n+1}^2$ no contiene valores críticos, en cada sección $M_{n,t}^1$ de C_{n+1}^2 en t podemos definir una referencia móvil \mathcal{F}_t proyectando ortogonalmente la referencia móvil de C_{n+1}^2 en $\mathbb{R}^n \times \{t\}$. De esta forma, todas las secciones $(M_{n,t}^1, \mathcal{F}_t)$ en $t \in (t_0, t_1)$ son difeomorfas y, aplicando un argumento de continuidad, $\delta(M_{n,t}^1, \mathcal{F}_t)$ no varía para $t \in (t_0, t_1)$. Por lo tanto es suficiente ver que δ tampoco cambia de valor en un intervalo con un valor crítico.

Sea M_{n,t_0}^1 una sección crítica y $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ un intervalo donde la única sección crítica es M_{n,t_0}^1 . Las secciones $(M_{n,t_0-\epsilon}^1, \mathcal{F}_{t_0-\epsilon})$, $(M_{n,t_0+\epsilon}^1, \mathcal{F}_{t_0+\epsilon})$ difieren en una componente conexa y $\alpha(M_{n,t_0-\epsilon}^1, \mathcal{F}_{t_0-\epsilon}) \equiv \alpha(M_{n,t_0+\epsilon}^1, \mathcal{F}_{t_0+\epsilon}) + 1 \pmod{2}$. Por lo tanto $\delta(M_{n,t_0-\epsilon}^1, \mathcal{F}_{t_0-\epsilon}) = \delta(M_{n,t_0+\epsilon}^1, \mathcal{F}_{t_0+\epsilon})$. \square

Volviendo al J_1 -morfismo, tenemos que $\delta(J_1^{n+1}(0)) = 0 \neq 1 = \delta(J_1^{n+1}(1))$, por lo que $\Omega_1^{\text{fr}}(\mathbb{R}^{n+1})$ tiene al menos dos elementos para $n > 2$. Como J_1^n es una aplicación exhaustiva de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ a $\Omega_1^{\text{fr}}(\mathbb{R}^{n+1})$, necesariamente J_1^n es un isomorfismo. Por lo tanto $\Omega_1^{\text{fr}}(\mathbb{R}^{n+1}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y de la construcción de Pontryagin-Thom se deduce que $\pi_{n+1}(S^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ para $n > 2$.

4. Conclusiones

En conclusión, $\pi_3(S^2)$ es isomorfo al grupo de las clases de cobordismo con referencias de 1-variedades inmersas en \mathbb{R}^3 . El fibrado de Hopf genera $\pi_3(S^2)$. Mediante la construcción de Pontryagin-Thom, podemos ver el fibrado de Hopf como un elemento de $\Omega_1^{\text{fr}}(\mathbb{R}^3)$, y este representa una circunferencia incluida en $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ con una referencia móvil definida rotando el fibrado normal canónico a lo largo de la variedad dando una vuelta completa.

Además toda 1-variedad con referencias en \mathbb{R}^3 es cobordante con referencias a S^1 con una referencia que define un lazo en $SO(2)$ y la clase de homotopía de este lazo determina la clase de cobordismo con referencias de la variedad, por lo que $\Omega_1^{\text{fr}}(\mathbb{R}^3) \cong \mathbb{Z}$.

Lo que sucede al suspender las 1-variedades con referencias en \mathbb{R}^{n+1} para $n > 2$ es que del mismo modo toda 1-variedad con referencias es cobordante con referencias a S^1 y la clase de cobordismo con referencias viene determinada por la clase de homotopía del lazo que se induce en $SO(n)$. Sin embargo en este caso $\pi_1(SO(n)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y por lo tanto $\Omega_1^{\text{fr}}(\mathbb{R}^{n+1}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Esto explica que el grupo de homotopía $\pi_{n+1}(S^n)$ estabilice en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ para $n \geq 3$.

Referencias

- [1] R. BOTT, L. W. TU, *Differential Forms in Algebraic Topology*. Graduate Texts in Mathematics, 82. Springer, 1982.
- [2] G. E. BREDON, *Topology and Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, 139. Springer, 1993.
- [3] A. T. FOMENKO, D. B. FUCHS y V. L. GUTENMACHER [translated by K. Mályusz], *Homotopic Topology*. Budapest: Akadémiai Kiadó, 1986.
- [4] B. C. HALL, *Lie Groups, Lie Algebras and Representations: An Elementary Introduction*, Graduate Texts in Mathematics, 222. Cham: Springer, 2015.
- [5] A. HATCHER, *Algebraic Topology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [6] I. M. JAMES (ED), *History of Topology*. Amsterdam: Elsevier, 1999.
- [7] J. MILNOR, *Topology From the Differentiable Viewpoint*, Princenton, N.J.: Princeton University Press, 1997.
- [8] L. S. PONTRYAGIN, *Smooth Manifolds and Their Applications in Homotopy Theory*. In: American Mathematical Society Translations, Ser. 2, Vol. 11, 1114, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1959.
- [9] V. V. PRASOLOV, *Elements of Combinatorial and Differential Topology*, Graduate Studies in Mathematics Vol. 74, Independent University of Moscow, Moscow, Russia. Translated by Olga Sipacheva, 2006.
- [10] R. R. L. J. VAN ASSELDONK, *The Hopf Map in Magnetohydrodynamics* <https://www.universiteitleiden.nl/binaries/content/assets/science/mi/scripties/bachvanasseldonk.pdf>